# CHƯƠNG 5: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

## 5.1 KHÁI NIỆM VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

### 5.1.1 Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính

Hệ m phương trình tuyến tính n ẩn có dạng tổng quát:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{5.1}$$

Hay $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ , i = 1, ..., m

Trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ là n ẩn,

$a_{ij}$ là hệ số của ẩn thứ j trong phương trình i,

$b_i$ là vế phải của phương trình thứ i; i = 1,..., n; j = 1,..., m.

Khi các vế phải $b_i = 0$ thì hệ phương trình được gọi là thuần nhất.

Nghiệm của hệ phương trình là bộ gồm $n$ số $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sao cho khi thay vào (5.1) ta có các đẳng thức đúng. Giải một hệ phương trình là đi tìm tập hợp nghiệm của hệ. Hai hệ phương trình cùng ẩn là tương đương nếu tập hợp nghiệm của chúng bằng nhau. Vì vậy để giải một hệ phương trình ta có thể giải hệ phương trình tương đương của nó.

### 5.1.2 Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Với hệ (5.1) ta xét các ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

$A$, $B$, $X$ lần lượt được gọi là ma trận hệ số, ma trận vế sau và ma trận ẩn. Khi đó hệ phương trình (5.1) được viết lại dưới dạng ma trận:

$$AX = B \tag{5.3}$$

### 5.1.3 Dạng véc tơ của hệ phương trình tuyến tính

Nếu ta ký hiệu véc tơ cột thứ i của ma trận $A$ là $v_i = (a_{1i},..., a_{mi}) \in \mathbb{R}^m$ và véc tơ vế sau $b = (b_1,..., b_m) \in \mathbb{R}^m$, thì hệ (5.1) được viết dưới dạng véc tơ:

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = b \tag{5.4}$$

Với cách viết này ta thấy rằng hệ phương trình (5.1) có nghiệm khi và chỉ khi $b \in Span\{v_1,..., v_n\}$.

## 5.2 ĐỊNH LÝ TỒN TẠI NGHIỆM

Định lý 3.18: (Kronecker-Kapelli) Hệ phương trình (5.1) có nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(\widetilde{A})$ trong đó $\widetilde{A}$ là ma trận có được bằng cách bổ sung thêm vào ma trận hệ số $A$ một cột cuối là vế phải của hệ phương trình.

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{5.5}$$

Chứng minh: Hệ (5.1) có nghiệm khi và chỉ khi tồn tại $x_1, x_2,..., x_n \in \mathbb{R}^n$ sao cho $x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = b$. Nghĩa là $b$ được biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính của $\{v_1,..., v_n\}$. Vậy $r(v_1,..., v_n) = r(v_1,..., v_n, b)$. Do đó $r(A) = r(\widetilde{A})$.

## 5.3 PHƯƠNG PHÁP CRAMER

Định nghĩa 5.1: Hệ n phương trình tuyến tính n ẩn có ma trận hệ số $A$ không suy biến được gọi là hệ Cramer.

Định lý 5.2: Mọi hệ Cramer đều tồn tại duy nhất nghiệm. Cụ thể

hệ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, i = 1, ..., n có nghiệm $x_i = D_i / D$, i = 1,..., n;

Trong đó $D = \det A = D_{\mathscr{B}}\{v_1,..., v_{i-1}, v_i, v_{i+1},..., v_n\}$

$$D_i = D_{\mathscr{B}}\{v_1,..., v_{i-1}, b, v_{i+1},..., v_n\} \tag{5.6}$$

$D_i$ là định thức của hệ các véc tơ cột là các hệ số của hệ phương trình nhưng véc tơ cột thứ i được thay bởi véc tơ cột vế sau.

Chứng minh: $\det A \neq 0 \Rightarrow$ hệ $\{v_1,...,v_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Do đó $b$ được biểu diễn duy nhất thành tổ hợp tuyến tính của $\{v_1,...,v_n\}$. Nghĩa là tồn tại duy nhất $x_1, x_2,..., x_n$ sao cho $x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = b$.

Gọi $\mathscr{B} = \{e_1,...,e_n\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$. Khi đó:

$$D_i = D_{\mathscr{B}}\{v_1,...,v_{i-1}, b, v_{i+1},...,v_n\} = D_{\mathscr{B}}\left\{v_1,...,v_{i-1}, \sum_{k=1}^{n} x_k v_k, v_{i+1},...,v_n\right\}$$

$$= x_i D_{\mathscr{B}}\{v_1,...,v_{i-1}, v_i, v_{i+1},...,v_n\} = x_i D \Rightarrow x_i = D_i / D, \text{ i = 1,..., n;}$$

Giải hệ phương trình tuyến tính trường hợp tổng quát

Giả sử hệ phương trình có nghiệm, do đó $r(v_1,...,v_n) = r(v_1,...,v_n,b)$. Giả sử $r(v_1,...,v_n) = r(v_1,...,v_p)$; $p \leq n$ (trong trường hợp khác cách giải hoàn toàn tương tự). Với giả thiết này $p$ véc tơ hàng phía trên của $A$ tạo thành hệ độc lập tuyến tính tối đại của hệ các véc tơ hàng của $A$. Vì vậy hệ (5.1) tương đương với $p$ phương trình đầu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ............................................. \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Giả sử $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0$ (trường hợp khác cách giải hoàn toàn tương tự)

Hệ phương trình trên được viết lại:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 - a_{1p+1}x_{p+1} - ... - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 - a_{2p+1}x_{p+1} - ... - a_{2n}x_n \\ ........................................................................ \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pp}x_p = b_p - a_{pp+1}x_{p+1} - ... - a_{pn}x_n \end{cases}$$

đây là hệ Cramer có vế sau phụ thuộc vào các ẩn $x_{p+1},...,x_n$. Vậy hệ có vô số nghiệm phụ thuộc $x_{p+1},...,x_n$.

Ví dụ 5.1: Giải và biện luận theo tham số $\lambda$ hệ $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1 \end{cases}$

Từ ví dụ 4.12 chương 4 ta có $\det A = (\lambda+3)(\lambda-1)^3$.

♦ Khi $\lambda \neq -3, \lambda \neq 1$: Hệ đã cho là hệ Cramer nên có nghiệm duy nhất. Ngoài ra vai trò của các ẩn trong hệ đều như nhau, do đó nghiệm của hệ:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{\lambda+3}$$

♦ Khi $\lambda = 1$: $r(A) = r(\widetilde{A}) = 1$, hệ phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

Hệ phương trình có vô số nghiệm $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$ với $x_2, x_3, x_4$ tuỳ ý.

♦ Khi $\lambda = -3$: $\det A = 0 \Rightarrow r(A) < 4$ (theo Ví dụ 3.18 $r(A) = 3$) nhưng ma trận bổ sung $\widetilde{A}$ có định thức con cấp 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 64 \neq 0 \;\Rightarrow\; r(\widetilde{A}) = 4 \;\Rightarrow\; \text{hệ vô nghiệm.}$$

## 5.4 PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

Định lý 5.3: Hệ Cramer $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, i = 1, ..., n, với các ma trận tương ứng

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

có nghiệm $X = A^{-1}B$.

## 5.5 GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP KHỬ GAUSS

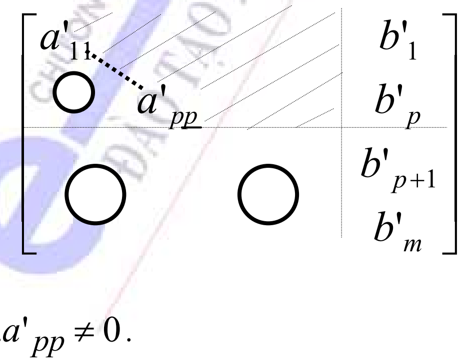
Ta có thể kiểm tra được rằng: khi thực hiện các biến đổi sơ cấp sau lên các phương trình của hệ thì sẽ được hệ mới tương đương:

- Đổi chỗ hai phương trình;
- Nhân, chia một số khác 0 vào cả 2 vế của một phương trình;
- Cộng vào một phương trình một tổ hợp tuyến tính các phương trình khác.

Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử Gauss là thực hiện các phép biến đổi sơ cấp (có thể đổi chỉ số các ẩn nếu cần) để đưa hệ phương trình (5.1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$; i = 1,..., m

về hệ tương đương $\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}\, x'_j = b'_i$;

i = 1,..., m. Các ẩn $x'_1,\dots,x'_n$ là các ẩn $x_1,\dots,x_n$ nhưng có thể thay đổi thứ tự chỉ số và ma trận bổ sung của hệ mới có dạng




(5.7)

trong đó $a'_{11}\dots a'_{pp} \neq 0$.

♦ Nếu một trong các $b'_{p+1},\dots,b'_m$ khác 0 thì có phương trình mà vế trái bằng 0, vế phải khác 0 nên hệ vô nghiệm.

♦Nếu $b'_{p+1} = \ldots = b'_m = 0$ thì hệ đã cho tương đương với hệ $p$ phương trình

$$\begin{cases} a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \quad \ldots \quad + a'_{1n}x'_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x'_2 + \quad \ldots \quad + a'_{2n}x'_n = b'_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a'_{p1}x'_1 + \ldots + a'_{pn}x'_n = b'_p \end{cases} \tag{5.8}$$

Ta được các nghiệm $x'_1, \ldots, x'_p$ phụ thuộc $x'_{p+1}, \ldots, x'_n$.

Chú ý rằng khi ta biến đổi tương đương lên các phương trình thì thực chất là biến đổi các hệ số trong các phương trình. Vì vậy khi thực hành ta chỉ cần biến đổi ma trận bổ sung (5.5) của hệ để đưa về ma trận có dạng (5.7), từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình.

<u>Ví dụ 5.2</u>: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$.

<u>Ví dụ 5.3</u>: Giải và biện luận theo tham số $m$ hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + mx_4 = 2 \end{cases}$$

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & m & 2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 4 & 1 & 4 & m & 2 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 0 & 20 & 32 & 64 & 36 \\ 0 & 15 & 24 & 48 & 27 \\ 0 & -5 & -8 & m-16 & -8 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 1 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 1 \end{bmatrix}.$$

Hệ đã cho tương đương với hệ: $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = -2 \\ 5x_2 + 8x_3 + 16x_4 = 9 \\ mx_4 = 1 \end{cases}$

♦ m = 0: hệ vô nghiệm;

♦ m ≠ 0: hệ có vô số nghiệm

$$x_4 = \frac{1}{m}, \quad x_2 = \frac{9m-16}{5m} - \frac{8}{5}x_3, \quad x_1 = \frac{4-m}{5m} - \frac{3}{5}x_3.$$

hay $\left( \frac{4-m}{5m} - \frac{3}{5}x_3, \frac{9m-16}{5m} - \frac{8}{5}x_3, x_3, \frac{1}{m} \right)$; $x_3$ tùy ý.

<u>Ví dụ 5.4</u>: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad - x_3 + \ \ x_4 - \ \ x_5 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 9x_4 \quad\quad = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - \ 8x_4 - 4x_5 = -2 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 - 16x_4 - 5x_5 = -3 \\ \ x_1 + x_2 + \quad\quad\quad x_4 + 2x_5 = -2 \end{cases}$

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & -9 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -8 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -16 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -11 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 4 & -11 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & -22 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -11 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & -22 & -2 & 14 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 22 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 22 & -22 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hệ đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad = -2 \\ \quad x_2 + x_3 \quad\quad + 3x_5 = 1 \\ \quad\quad\quad x_3 - 3x_4 \quad\quad = 2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad 2x_4 + \ x_5 = -1 \end{cases} \quad \text{có nghiệm} \quad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 + 3x_4 \\ x_3 = 2 + 3x_4 \\ x_5 = -1 - 2x_4; \ \ x_4 \text{ tuỳ ý} \end{cases}$$

## 5.6 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

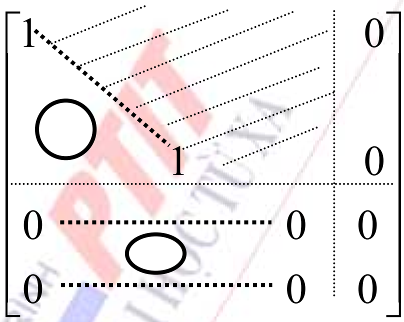
Rõ ràng rằng với hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (5.9) thì $r(\widetilde{A}) = r(A) \le n$ và luôn có nghiệm tầm thường $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Định lý 5.4:

a) Hệ (3.14) chỉ có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi $r(A) = n$.

b) Nếu $r(A) = p < n$ thì nghiệm của hệ (5.9) là không gian con $n - p$ chiều của $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh: Ta chứng minh b). Thực hiện các biến đổi tương đương lên ma trận bổ sung (5.8) của hệ để đưa về hệ tương đương với ma trận bổ sung có dạng



(5.10)

Suy ra nghiệm có dạng
$$\begin{cases} x'_1 = c_{11}x'_{p+1} + \ldots + c_{1n-p}x'_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_p = c_{p1}x'_{p+1} + \ldots + c_{pn-p}x'_n \end{cases}$$

Trong đó $(x'_1, \ldots, x'_n)$ là một hoán vị của $(x_1, \ldots, x_n)$. Để đơn giản ta giả sử $x'_1 = x_1, \ldots, x'_n = x_n$ (trường hợp khác được chứng minh tương tự), khi đó tập hợp nghiệm:

$$\left\{ (c_{11}x_{p+1} + \ldots + c_{1n-p}x_n, \ldots, c_{p1}x_{p+1} + \ldots + c_{pn-p}x_n, x_{p+1}, \ldots, x_n) \,\middle|\, x_{p+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ (c_{11},...,c_{p1},1,0,...,0)x_{p+1} + ... + (c_{1n-p},...,c_{pn-p},0,0,...,1)x_n \,\middle|\, x_{p+1},...,x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

là không gian con $n-p$ chiều của $\mathbb{R}^n$.

Định lý 5.5: Giả sử $(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)$ là một nghiệm của phương trình không thuần nhất (5.1) thì $(x_1,...,x_n)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng (5.9) khi và chỉ khi $(x_1+\overline{x}_1,...,x_n+\overline{x}_n)$ là nghiệm của phương trình (5.1).